

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A IX A

1. Prima și a doua cifră a numărului de două cifre N , scris în baza 10, reprezintă primul și al doilea termen ai unei progresii geometrice, iar însuși N este de trei ori mai mare decât al treilea termen al acestei progresii. Să se găsească toate numerele N cu această proprietate.

2. Se consideră triunghiul ABC având centrul de greutate G și notăm cu N simetricul lui G față de mijlocul M al segmentului (BC) . Demonstrați că:

a) $\overrightarrow{NG} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}$;

b) $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NG}$;

c) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NG}$;

d) Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care avem relația $a\overrightarrow{NA} + b\overrightarrow{NB} + c\overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

3. Pe data de 1 ianuarie 2011 o veveriță istească are o "rezervă" de 66 de alune. Începând cu această zi ea consumă din rezerva acumulată, respectând următoarele reguli:

1) În zilele când are un număr par de alune ea mănâncă jumătate dintre ele;

2) În zilele când are un număr impar de alune ea nu mănâncă nici o alună, dar mai culege încă trei alune.

Dacă ar exista 7 zile consecutive în care veverița nu ar consuma nici o alună, aceasta ar muri.

a) Câte alune mănâncă veverița pe 7 ianuarie?

b) Din ce dată veverița va mânca doar câte trei alune, odată la două zile?

c) Justificați faptul că veverița nu va muri niciodată.

4. Un câine care se află în punctul A gonește o vulpe care se află în punctul B la $30m$ distanță față de el. Saltul câinelui este de $2m$, iar saltul vulpii este de $1m$. Câinele face două salturi în același timp în care vulpea face trei salturi. La ce distanță față de punctul A , câinele v-a prinde vulpea?

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A X A

1. Raluca, Bogdan și Andreea au, fiecare, câte un anumit număr de timbre. Câte timbre are fiecare dacă jumătatea numărului de timbre a Ralucăi, treimea numărului de timbre a lui Bogdan și cincimea numărului de timbre a Andreei sunt, în această ordine, trei numere naturale consecutive a căror sumă este egală cu 48?

2. Să se rezolve sistemul de ecuații:
$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ x^2 - 5y = -4 \end{cases}.$$

3.

a) Din 7 ingineri și 4 maiștri se aleg 5 persoane pentru a forma o echipă de intervenție. În câte moduri se poate alcătui această echipă, știind că în componența ei trebuie să intre cel puțin 2 maiștri?

b) Să se determine rangul termenului din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{21}$ în care x și y au puteri egale, unde $x, y \in (0, +\infty)$.

4. Fie punctul $M(3, 3)$ și triunghiul ABC determinat de dreptele: $AB: x + 2y - 4 = 0$; $BC: 3x + y - 2 = 0$; $CA: x - 3y - 4 = 0$.

a) Să se determine coordonatele punctelor A , B și C .

b) Să se calculeze aria triunghiului ABC .

c) Fie P , Q , R proiecțiile punctului M pe dreptele OA , OB și AB , unde O este originea reperului cartezian. Să se demonstreze că punctele P , Q , R sunt coliniare.

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A XI A

1. Într-o comună locuiesc 10055 persoane (blonzi și bruneți). Nu toți spun adevărul (30% dintre blonzi spun că sunt bruneți și 20% dintre bruneți spun că sunt blonzi). Ceilalți spun adevărul. Într-o zi, toți locuitorii comunei, răspund la întrebarea: "Sunteți blond sau brunet?", întrebare la care, 60% dintre ei au răspuns că sunt blonzi. Câți bruneți locuiesc în comună?

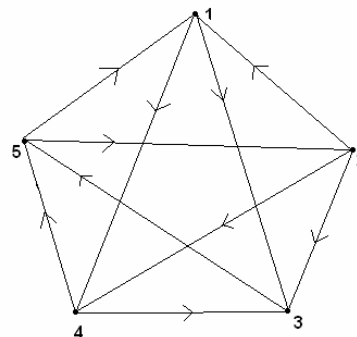
2. Distribuția unui lot de piese după valorile diametrului lor este dată în tabelul:

Diametru (cm)	4	5	6	8	10	12
Nr. Piese	80	270	180	200	38	32

- Care este valoare medie a diametrelor pieselor?
- Indicați diametrul în raport cu care există tot atâtea piese cu diametru mai mic cât și cu diametru mai mare decât acesta;
- Să se calculeze dispersia valorilor variabilei.

3. Pentru graful din imagine

- Determinați câte un circuit de lungime 3, respectiv 4;
- Să se arate că graful dat este hamiltonian;
- Este graful din imagine eulerian? Justificați răspunsul.



4. Într-un semestru Raluca și Ionel au luat 40 de note fiecare și la sfârșitul semestrului au obținut aceeași medie finală. Numărul notelor de 7, de 8, de 9 și de 10 luate de Raluca este respectiv egal (în această ordine strictă) cu numărul notelor de 10, de 7, de 8 și de 9 luate de Ionel. Câte note de 10 a luat Ionel?

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A XII A

1. În $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}$.

a) Să se demonstreze că $A(x) \cdot A(y) = A(x \cdot y), \forall x, y \in \mathbf{R}$.

b) Să se demonstreze că $A^n(x) = A(x^n), \forall x \in \mathbf{R}$ și $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

c) Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care $A^{2011}(x) = I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea \mathbf{R} se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 2(x + y) + 6$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x - 2)(y - 2) + 2, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

b) Aflați $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $x \circ a = a, \forall x \in \mathbf{R}$.

c) Știind că legea de compoziție " \circ " este asociativă, să se calculeze expresia:

$$E = (-2011) \circ (-2010) \circ \dots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2010 \circ 2011.$$

3. Contabilul unei firme de dulciuri compară vânzările de iepurași și ouă de ciocolată din luna aprilie a anului 2011 și observă că numărul de ouă de ciocolată este triplu față de numărul de iepurași de ciocolată vânduți. Mai observă că numărul ce reprezintă iepurașii vânduți începe cu 1 și că mutând această cifră la sfârșitul numărului obține numărul ce reprezintă ouăle de ciocolată vândute. Știind că numărul iepurașilor vânduți este cel mai mic număr cu această proprietate aflați câți iepurași și câte ouă de ciocolată s-au vândut.

4. Cristina a măsurat temperatura minimă din orașul Iași, în fiecare zi din lunile decembrie 2010 și ianuarie 2011. Fie t_1, t_2, \dots, t_{62} temperaturile măsurate, în această ordine, începând cu 1 decembrie și până pe 31 ianuarie.

Exceptând temperaturile din 1 decembrie și 31 ianuarie, la finalul măsurătorilor făcute, Cristina constată faptul că temperatura minimă a fiecărei zile este egală cu suma temperaturilor minime ale zilelor de dinaintea și de după ziua în care face măsurătoarea.

Pe 3 decembrie 2010 și pe 31 ianuarie 2011, temperatura minimă măsurată a fost de -5°C ($t_3 = t_{62} = -5^\circ \text{C}$). Demonstrați că:

a) $t_i = -t_{i+3}, \forall i = \overline{1, 59}$;

b) $t_i = t_{i+6}, \forall i = \overline{1, 56}$;

c) Determinați temperatura minimă din prima zi de Crăciun (25 decembrie).

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.